ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ (1^{o} ΚΕΦΑΛΑΙΟ)

i) Δίνεται η καμπύλη $c(t) = \left(\sqrt{1+t^2},\, 2t,\, \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)$, $t \in \mathbb{R}$

- Να υπολογιστεί το μήκος της παραπάνω καμπύλης από το $A(\sqrt{2}, -2, \ln(\sqrt{2}-1))$ ως το $B(\sqrt{2}, 2, \ln(\sqrt{2}+1))$
- Να δειχθεί ότι η καμπύλη c είναι σταθερής κλίσης
- Να βρεθεί το σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει σταθερή γωνία με τις εφαπτόμενες της c
- Ποιο το πλαίσιο Frenet ως προς την παράμετρο $t \in \mathbb{R}$;

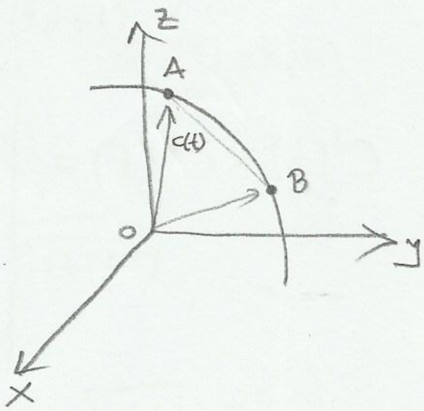
ii) Να δειχθεί ότι το δεύτερο μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\vec{b}$ μίας καμπύλης $c = c(t)$, $t \in \mathbb{R}$ με καμπυλότητα $k(t) > 0$ είναι ίσο με:

$$\vec{b}(t) = \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|}, \quad t \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

i) $$c'(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\, 2,\, \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right), \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\|c'(t)\| = \sqrt{\frac{t^2}{1+t^2} + 4 + \frac{1}{1+t^2}} = \sqrt{5}$$



- Για να υπολογίσουμε το μήκος AB της καμπύλης c, θα πρέπει να βρούμε σε ποιές τιμές του $t \in \mathbb{R}$ αντιστοιχούν τα A και B.

Για το A $\rightarrow$ $t = -1$ ώστε $c(-1) = A$

Για το B $\rightarrow$ $t = 1$ ώστε $c(1) = B$.

Άρα,

$$L_{-1}^{1}(c) = \int_{-1}^{1} \|c'(t)\|\, dt = \int_{-1}^{1} \sqrt{5}\, dt = \sqrt{5}\, t\Big]_{-1}^{1} = 2\sqrt{5}$$

• Μία καμπύλη είναι σταθερής κλίσης $\iff \frac{\tau}{k} = \text{σταθ.}$, $k>0$ όπου k η καμπυλότητα και τ η στρέψη της καμπύλης. Πρόκειται για καμπύλη τυχαίας παραμέτρου t.

Υπολογίζουμε:

$$k = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3} \quad \text{και} \quad \tau = \frac{(c'(t), c''(t), c'''(t))}{\|c'(t) \times c''(t)\|}.$$

$$c''(t) = \left(\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}, 0, -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \right)$$

$$c'''(t) = \left(-\frac{\frac{3}{\cancel{2}}(1+t^2)^{1/2} \cdot \cancel{2}t}{(1+t^2)^3}, 0, \frac{-(1+t^2)^{3/2} + t \cdot \frac{3}{\cancel{2}}(1+t^2)^{1/2} \cdot \cancel{2}t}{(1+t^2)^3} \right) =$$

$$= \left(\frac{-3t}{(1+t^2)^{5/2}}, 0, \frac{(1+t^2)^{1/2}(-1-t^2+3t^2)}{(1+t^2)^3} \right) =$$

$$= \left(\frac{-3t}{(1+t^2)^{5/2}}, 0, \frac{2t^2-1}{(1+t^2)^{5/2}} \right).$$

$$c'(t) \times c''(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & 2 & \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}} & 0 & -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(-\frac{2t}{(1+t^2)^{3/2}}, \frac{\sqrt{1+t^2}}{(1+t^2)^{3/2}}, -\frac{2}{(1+t^2)^{3/2}} \right)$$ και έχει μέτρο:

$$\|c'(t) \times c''(t)\| = \frac{\sqrt{5}}{1+t^2}.$$

Όμοια, το μικτό γινόμενο:

$$(c'(t), c''(t), c'''(t)) = \frac{2}{(1+t^2)^3}.$$

Έτσι, $k = \dfrac{\frac{\sqrt{5}}{1+t^2}}{5\sqrt{5}} = \dfrac{1}{5(1+t^2)}$ και $\tau = \dfrac{\frac{2}{(1+t^2)^3}}{\frac{5}{(1+t^2)^2}} = \dfrac{2}{5(1+t^2)}$

$\dfrac{\tau}{k} = 2 = ctg\varphi$. Η καμπύλη είναι σταθεράς κλίσης

- Για να υπολογιστεί το σταθερό μοναδιαίο διάνυσμα ουσιαστικά θα πρέπει να κάναμε το αντίστροφο:

$\dfrac{\tau}{k} = 2 = ctg\varphi \Rightarrow \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = 2 \Rightarrow \cos\varphi = 2\sin\varphi.$

όμως, εκ της τριγωνομετρικής σχέσης:

$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, θα έχουμε:

$5\cdot\sin^2\varphi = 1 \Rightarrow \sin\varphi = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ & $\cos\varphi = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Longrightarrow \sin\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ & $\cos\varphi = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

το διάνυσμα που αναζητάμε είναι της μορφής:

$\vec{w} = \cos\varphi\,\vec{t} + \sin\varphi\cdot\vec{b}$ ώστε $\|\vec{w}\| = 1$

Έτσι, $\vec{t} = \dfrac{c'(t)}{\|c'(t)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, 2, \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$

και

$$\vec{b} = \frac{c'(t)\times c''(t)}{\|c'(t)\times c''(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+t^2}}\left(-2t, \sqrt{1+t^2}, -2\right).$$

Αντικαθιστάμε και θα πρέπει να είναι σταθερό:

$$\vec{w} = \dots = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\left(0, 5\sqrt{1+t^2}, 0\right) = (0,1,0).$$

- Για το πλαίσιο Frenet ως προς την t παράμετρο

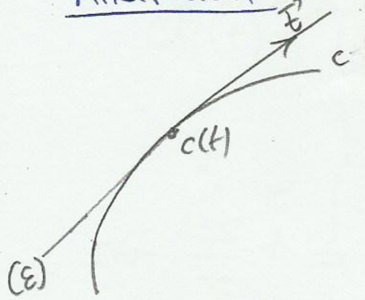
$$\vec{n}(t)=\vec{b}(t)\times\vec{t}(t)=\frac{1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} & 1 & -\frac{2}{\sqrt{1+t^2}}\\ \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} & 2 & \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\end{vmatrix}=\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}},\ 0,\ -\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

το οποίο είναι μοναδιαίο. (Αυτό για επαλήθευση)

άρα έχουμε το πλαίσιο $\{\vec{t},\vec{n},\vec{b}\}$.

Extra Ερώτημα: Να υπολογιστεί η εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της καμπύλης $c=c(t)$.

Απάντηση



$$(\varepsilon):\ P=c(t)+\lambda\cdot c'(t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P=\left(\sqrt{1+t^2},\ 2t,\ \ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right)+\lambda\cdot\left(\frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ 2,\ \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=\lambda\cdot t/\sqrt{1+t^2}+\sqrt{1+t^2}\\ y=\lambda\cdot 2+2t\\ z=\lambda\cdot 1/\sqrt{1+t^2}+\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\end{cases}\Bigg|\ t\in\mathbb{R}.$$

ii) $\vec{b}(t)=\vec{b}(s(t))$ (διότι θεωρώντας την αναπαραμέτρηση $\tilde{c}=c\circ f$ η καμπύλη αντίστοιχα αλλά μοναδιαίας ταχύτητας όπου $f^{-1}=s^{-1}$ με s: μήκος τόξου).

Τότε, $\vec{b}(s(t))=\vec{t}(s(t))\times\vec{n}(s(t))=\vec{t}(t)\times\vec{n}(t)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\vec{b}(t)=\vec{b}(s(t))=\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}\times\frac{(c'(t),c''(t),c'''(t))}{\|c'(t)\|\cdot\|c'(t)\times c''(t)\|}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{b}(t)=\vec{b}(s(t))=\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}\times\left(\frac{c'(t)\times c''(t)}{\|c'(t)\times c''(t)\|}\times\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\vec{b}(t)=\frac{c'(t)\times c''(t)}{\|c'(t)\times c''(t)\|}$$

ή Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους μετασχηματισμούς

$$\mathring{c}=\mathring{t}\cdot c',\quad \overset{\circ\circ}{c}=\overset{\circ\circ}{t}c'+(\mathring{t})^2c'',\quad \overset{\circ\circ\circ}{c}=\overset{\circ\circ\circ}{t}c'+3\mathring{t}\overset{\circ\circ}{t}c''+(\mathring{t})^3c'''$$

για να αποδείξουμε τη σχέση του $\vec{b}(t)$.